

Calculs simplifiés de sections rectangulaires ou en T en béton armé en flexion simple

NOTE TECHNIQUE

Sommaire

1	Objet	2
2	Références	3
3	Notations	4
4	Formulations	5
4.1	Section rectangulaire	7
4.2	Section en T	8
4.2.1	Section en T avec moment négatif	8
4.2.2	Section en T avec moment positif	8
4.3	Sections minimale et maximale d'aciers	11
5	Calculs numériques	12
5.1	Section rectangulaire sans acier comprimé	12
5.2	Section en T sans acier comprimé, axe neutre en dehors de la table	13
6	Conclusions	14

Liste des figures

1	section rectangulaire	5
2	section en T	8

1 Objet

On présente dans cette note :

- ✱ Les formules théoriques utilisées pour le calcul des quantités d'aciers dans une section rectangulaire ou en T en béton armé soumise à de la flexion simple.
- ✱ Le détail des calculs pour une section donnée.

Pour simplifier, on ne considère dans la suite que les aciers à palier horizontal (cas le plus fréquent). La théorie associée peut être retrouvée dans de nombreux articles de la littérature.

2 Références

- [1] Jean Roux, *Pratique de l'Eurocode 2* AFNOR éditions, Eyrolles 2009.
- [2] Roman Nicot, *Béton Armé Application de l'eurocode 2* Ellipses, Technosup, 2001.
- [3] Eurocode 2, *Calcul des structures en béton et document d'application nationale* NF-EN-1992-1-1, 2004.
- [4] SAFE, *Reinforced concrete design manual* Computers and Structures Inc., 2008.

3 Notations

A_s	section d'aciers tendus mm^2
A'_s	section d'aciers comprimés mm^2
a	hauteur de la zone comprimée mm
b	largeur de la zone comprimée mm
b_f	largeur de la table de compression mm
b_w	largeur de l'âme pour une section en T mm
d	position effective pour les aciers de traction (hauteur totale-enrobage) mm
d'	hauteur effective des aciers de compression (enrobage supérieur) mm
E_c	module de compression du béton MPa
E_s	module de l'acier MPa
f_{cd}	contrainte de calcul du béton, $\alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$ MPa
f_{ck}	contrainte caractéristique de compression du béton sur cylindre à 28 jours MPa
f_{ctm}	contrainte moyenne de résistance en traction du béton MPa
f'_s	contrainte calculée dans les aciers de compression MPa
f_{yd}	contrainte de calcul de l'acier = $\frac{f_{yk}}{\gamma_s}$ MPa
f_{yk}	contrainte caractéristique de résistance en traction de l'acier MPa
h	hauteur totale de la section mm
h_f	hauteur de la table pour une section en T mm
M_{Ed}	moment de calcul au centre de gravité de la section $N.mm$
m	moment de calcul normalisé, $\frac{M_{Ed}}{bd^2 \eta f_{cd}}$
m_{lim}	moment limite normalisé
x	position de l'axe neutre mm
x_{lim}	position limite de l'axe neutre mm
z	bras de levier mm
α_{cc}	coefficient pour les contraintes à long terme du béton
δ	facteur de redistribution
ϵ_c	déformation du béton
ϵ_s	déformation des aciers tendus
ϵ'_s	déformation des aciers comprimés
γ_c	coefficient de sécurité du béton
γ_s	coefficient de sécurité de l'acier
λ	facteur définissant la hauteur effective de la zone de compression
η	facteur de réduction pour chargement soutenu
ω	taux de renforcement normalisé en traction
ω'	taux de renforcement normalisé en compression
ω_{lim}	taux de renforcement normalisé limite en traction

4 Formulations

La procédure de calcul est basée sur l'équilibre de la section, avec un diagramme rectangulaire pour le béton, comme indiqué sur la figure suivante :

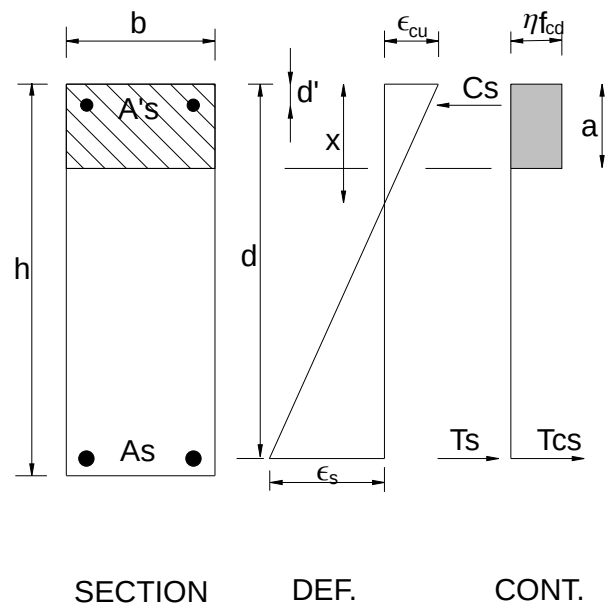


FIGURE 1 – section rectangulaire

L'effort sur la zone comprimée du béton est déterminé par :

$$F_c = \eta f_{cd} ab$$

$$a = \lambda x$$

avec :

$$\eta = 1.0 \text{ pour } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\eta = 1.0 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{200} \right) \text{ pour } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

et

$$\lambda = 0.8 \text{ pour } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\lambda = 0.8 \left(\frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \text{ pour } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

La valeur limite du ratio de la position de l'axe neutre par rapport à la hauteur effective d est défini par l'une des expressions suivantes :

$$\left(\frac{x}{d}\right)_{lim} = \frac{\delta - k_1}{k_2} \text{ pour } f_{ck} \leq 50MPa$$

$$\left(\frac{x}{d}\right)_{lim} = \frac{\delta - k_3}{k_4} \text{ pour } f_{ck} > 50MPa$$

Pour des aciers tels que $f_{yk} \leq 500MPa$ les valeurs suivantes sont utilisées :

$$k_1 = 0.44$$

$$k_2 = k_4 = 1.25\left(0.6 + \frac{0.0014}{\epsilon_{cu2}}\right)$$

$$k_3 = 0.54$$

δ est pris égal à 1.

4.1 Section rectangulaire

Le moment normalisé est calculé par :

$$m = \frac{M_{Ed}}{bd^2\eta f_{cd}}$$

Pour une section avec aciers de tractions seulement, le moment limite admissible pour le béton s'écrit :

$$m_{lim} = \lambda \left(\frac{x}{d} \right)_{lim} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{x}{d} \right)_{lim} \right]$$

La procédure pour le calcul des sections d'aciers est alors la suivante :

- si $m \leq m_{lim}$ il n'est pas nécessaire de calculer des aciers de compression, et le ratio normalisé d'aciers vaut

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2m}$$

La section d'aciers de traction est donnée par :

$$A_s = \omega \left(\frac{\eta f_{cd} b d}{f_{yd}} \right)$$

- si $m > m_{lim}$ il faut alors des aciers de traction et de compression calculés en utilisant les ratios normalisés :

$$\omega_{lim} = \lambda \left(\frac{x}{d} \right)_{lim} = 1 - \sqrt{1 - 2m_{lim}}$$

$$\omega' = \frac{m - m_{lim}}{1 - \eta f_{cd} d'}$$

$$\omega = \omega_{lim} + \omega'$$

d' correspond à l'enrobage des aciers comprimés

Les sections d'acier en compression et en traction sont obtenues par les relations :

$$A'_s = \omega' \left[\frac{\eta f_{cd} b d}{f'_s - \eta f_{cd}} \right]$$

$$A_s = \omega \left[\frac{\eta f_{cd} b d}{f_{yd}} \right]$$

f'_s est la contrainte dans les aciers comprimés calculée suivant :

$$f'_s = E_s \epsilon_c \left[1 - \frac{d'}{x_{lim}} \right] \leq f_{yd}$$

4.2 Section en T

La procédure de calcul est basée sur l'équilibre de la section, avec un diagramme rectangulaire pour le béton, comme indiqué sur la figure suivante :

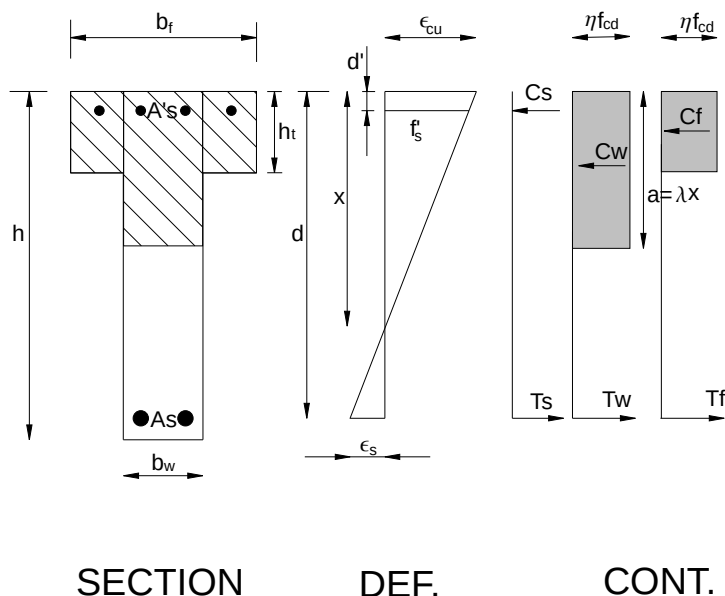


FIGURE 2 – section en T

4.2.1 Section en T avec moment négatif

Si le moment est négatif, c'est la fibre inférieure qui est comprimée. On considère dans ce cas une section rectangulaire de largeur b de hauteur h , la hauteur utile d étant la différence entre la hauteur totale et l'enrobage de la fibre supérieure. On est ramené dans ce cas au calcul d'une section rectangulaire, traité dans le paragraphe précédent.

4.2.2 Section en T avec moment positif

Le moment étant positif, c'est la fibre supérieure qui est comprimée. La procédure de calcul est basée sur l'équilibre de la section, avec un diagramme rectangulaire pour le béton, comme indiqué sur la figure 2.

Le moment normalisé est calculé par :

$$m = \frac{M_{Ed}}{b_f d^2 \eta f_{cd}}$$

les valeurs limites de m_{lim} et ω_{lim} et a_{max} sont ensuite calculées :

$$m_{lim} = \lambda \left(\frac{x}{d} \right)_{lim} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{x}{d} \right)_{lim} \right]$$

$$\omega_{lim} = \lambda \left(\frac{x}{d} \right)_{lim} = 1 - \sqrt{1 - 2m_{lim}}$$

$$a_{max} = \omega_{lim} d$$

les valeurs de ω et a sont calculées par :

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2m}$$

$$a = \omega d$$

Si $a \leq h_f$ le calcul de la section d'aciers tendus est mené comme pour une section rectangulaire, en prenant comme largeur de section b_f (largeur de la table de compression). Des aciers de compressions sont nécessaires, si $m > m_{lim}$.

Si $a > h_f$ le calcul de la section d'aciers tendus est mené en deux parties. La première partie pour équilibrer l'effort de compression dans la table, la seconde pour équilibrer l'effort de compression dans l'âme.

La quantité d'aciers nécessaires pour équilibrer l'effort de compression dans la table vaut :

$$A_{s2} = \frac{(b_f - b_w) h_f \eta f_{cd}}{f_{yd}}$$

Et le moment résistant correspondant vaut :

$$M_2 = A_{s2} f_{yd} \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

Il reste à déterminer la quantité d'aciers nécessaires pour équilibrer la force de compression dans l'âme de section rectangulaire de largeur b_w soumise au moment $M_1 = M_{Ed} - M_2$.

On calcule le moment réduit m_1 :

$$m_1 = \frac{M_1}{b_w d^2 \eta f_{cd}}$$

- Si $m_1 \leq m_{lim}$

$$\omega_1 = 1 - \sqrt{1 - 2m_1}$$

$$A_{s1} = \omega_1 \left[\frac{\eta f_{cd} b_w d}{f_{yd}} \right]$$

- Si $m_1 > m_{lim}$

$$\omega' = \frac{m_1 - m_{lim}}{1 - \frac{d'}{d}}$$

$$\omega_{lim} = \lambda \left(\frac{x}{d} \right)_{lim}$$

$$\omega_1 = \omega_{lim} + \omega'$$

$$A'_s = \omega' \left[\frac{\eta f_{cd} b_f d}{f'_s - \eta f_{cd}} \right]$$

$$A_{s1} = \omega_1 \left[\frac{\eta f_{cd} b_w d}{f_{yd}} \right]$$

La quantité f'_s correspond à la contrainte dans les aciers comprimés et vaut :

$$f'_s = E s \epsilon_c \left[1 - \frac{d'}{x_{lim}} \right] \leq f_{yd}$$

Avec les formules ci-dessus, la quantité totale d'aciers de traction vaut $A_s = A_{s1} + A_{s2}$, et la quantité d'aciers de compression vaut A'_s .

4.3 Sections minimale et maximale d'aciers

La quantité minimale d'aciers de traction nécessaire est la valeur maximale des quantités ci dessous :

$$A_{s,min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} bd$$

$$A_{s,min} = 0.0013bd$$

f_{ctm} étant la valeur moyenne de la résistance en traction du béton calculée forfaitairement par :

$$f_{ctm} = 0.3 f_{ck}^{(2/3)} \text{ pour } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa.}$$

$$f_{ctm} = 2.12 \ln\left(1 + \frac{f_{cm}}{10}\right) \text{ pour } f_{ck} > 50 \text{ MPa.}$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa.}$$

Le minimum nécessaire pour le calcul de vérification d'ouverture des fissures doit être effectué par ailleurs.

La quantité maximale d'aciers de traction ou de compression doit être inférieure à 0.04 fois la section totale de béton.

5 Calculs numériques

5.1 Section rectangulaire sans acier comprimé

La section étudiée aura pour dimensions 0.2x0.5 m. L'enrobage des aciers inférieurs et supérieurs est de 3 cm.

Le moment fléchissant de calcul vaut $M_{Ed} = 50000 \text{ N.m}$

Les caractéristiques du béton et de l'acier valent $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ et $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ respectivement.

Les coefficients de sécurité du béton et de l'acier γ_c et γ_s valent respectivement 1.5 et 1.15.

Les quantités calculées sont les suivantes :

$$k_1 = 0.44 \quad k_2 = k_4 = 1.25 \quad k_3 = 0.54$$

$$\left(\frac{x}{d}\right)_{lim} = 0.448$$

$$\eta = 1.0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0.8$$

$$f_{cd} = 20.0 \quad \text{et} \quad f_{yd} = 434.8$$

$$m = 0.0542$$

$$m_{lim} = 0.278$$

On est bien dans le cas $m \leq m_{lim}$ et les aciers comprimés ne sont pas nécessaires. On en déduit :

$$\omega = 0.056$$

$$A_s = 2.47 \text{ cm}^2$$

5.2 Section en T sans acier comprimé, axe neutre en dehors de la table

La section étudiée aura pour dimensions $h = 0.8m$ $h_f = 0.15m$ $b_w = 0.3m$ $b_f = 0.5m$ L'enrobage des aciers inférieurs et supérieurs est de 8 cm.

Le moment fléchissant de calcul vaut $M_{Ed} = 835000 \text{ N.m}$

Les caractéristiques du béton et de l'acier valent $f_{ck} = 25.5 \text{ MPa}$ et $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ respectivement.

Les coefficients de sécurité du béton et de l'acier γ_c et γ_s valent respectivement 1.5 et 1.15.

Les quantités calculées sont les suivantes :

$$k_1 = 0.44 \quad k_2 = k_4 = 1.25 \quad k_3 = 0.54$$

$$\left(\frac{x}{d}\right)_{lim} = 0.448$$

$$\eta = 1.0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0.8$$

$$f_{cd} = 14.16 \quad \text{et} \quad f_{yd} = 434.8$$

$$m = 0.189$$

$$m_{lim} = 0.294$$

$$a = 0.153 > h_f$$

$$A_{s2} = 11.73 \text{ cm}^2$$

$$m1 = 0.000191 < m_{lim}$$

$$A_{s1} = 18.11 \text{ cm}^2$$

On est bien dans le cas $a > h_f$ et $m1 \leq m_{lim}$ et les aciers comprimés ne sont pas nécessaires.

La section totale d'aciers inférieurs s'en déduit :

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 29.84 \text{ cm}^2$$

6 Conclusions

Cette note a permis de rappeler les formules simplifiées utilisées pour calculer des sections rectangulaires ou en T en béton armé soumises à de la flexion simple, selon l'EUROCODE 2.

Les calculs numériques du paragraphe 5 fournissent les résultats des calculs de vérifications effectués.

Les formules ont été programmées avec interface graphique (GUI) en Tcl/tk, Python et Java. Les programmes correspondants peuvent être fournis sur demande.

Fin de la note